８．平行線角

8.1 平行線角の定義

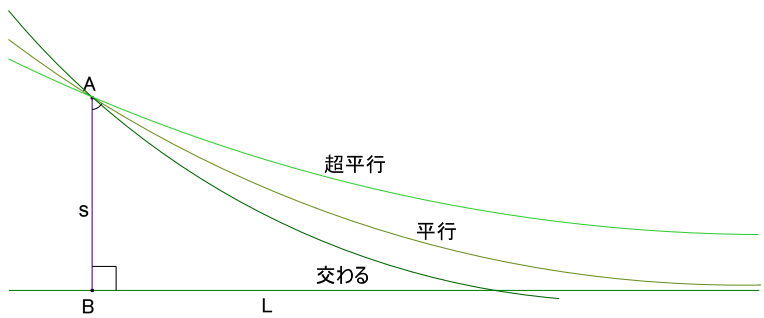
下図は，H^+ ではなく，「感じ」をつかむための模式図です．L 外の１点 A を通り L と直交する双曲的直線を N, N と L の交点を B，M と N のなす角のうち，90° 以下のほうの角を θ とします．A と L を固定しておいて，θ を直角から，だんだん小さくしていくと，L と M の関係は,

「超平行」→「平行」→「交わる」

と変化します.

ちょうど，L と M が「平行」になった時，角 θ を「平行線角」といいます.

A と L との距離が大きくなると,「M を L に平行にするには, θ を小さくしないといけない」ので, $[\mathrm{A,B}] = s$ とおくと，θ は，s の減少関数となります．これを $\Pi(s)$ と表します.

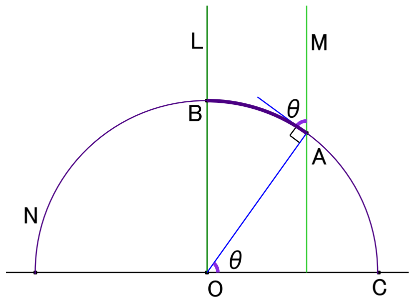


[注]「平行な２直線は，一方の向きでは限りなく近づき，反対向きには 限りなく離れる」ので，この様に描きました．イメージ図です.
Bolyai は「平行」の代わりに「極限平行」と言う表現を使っています.

8.2 平行線角の計算

以下，H^+ で考えます．L と M を実軸に垂直な 2 直線， L と実軸の交点 O を中心とし M と交わる円を N，さらに N と M，L の交点を A,B と定めます．このとき，L と M は平行な双曲的直線，N は L と直交する双曲的直線だから，N と M のなす角 θ が 平行線角 となります．ところが， θ は図の $\angle$AOC と等しいから (3.4)より，

$$[\mathrm{A,B}]=\log\left(\frac{\tan\dfrac{\angle \mathrm{COB}}{2}}{\tan\dfrac{\angle \mathrm{COA}}{2}}\right)=\log\left(\frac{\tan\dfrac{\pi}{4}}{\tan\dfrac{\theta}{2}}\right)=-\log\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)$$



ゆえに，$[\mathrm{A,B}]=s$ とおくと，

$$\tan\frac{\theta}{2}=e^{-s}$$

さらに，変形すると，

$$\cosh(s)=\frac{e^s+e^{-s}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}+\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}=\frac{1}{\sin\theta}$$

すなわち，点 A と直線 L の距離を s ， 平行線角を $\Pi(s)$ とすると，次の同値な 2 式が得られます．

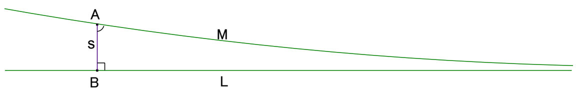
$$\boxed{\begin{cases}\tan\dfrac{\Pi(s)}{2}=e^{-s}\\[2ex] \dfrac{1}{\sin\Pi(s)}=\cosh(s)\end{cases}}$$

例えば，

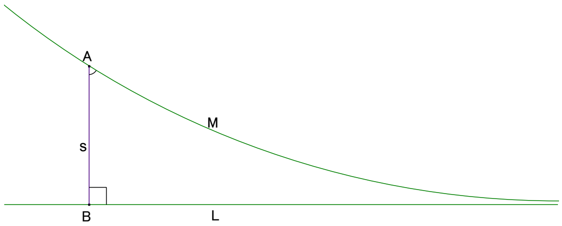
$$\begin{cases}\Pi(0.1)=\sin^{-1}\dfrac{1}{cosh(0.1)}\fallingdotseq\sin^{-1}\dfrac{1}{1.005}\fallingdotseq 1.47rad\fallingdotseq 84.3^\circ\\[2ex] \Pi(1)=\sin^{-1}\dfrac{1}{cosh(1)}\fallingdotseq\sin^{-1}\dfrac{1}{1.543}\fallingdotseq 0.705rad\fallingdotseq 40.4^\circ\\[2ex] \Pi(3)=\sin^{-1}\dfrac{1}{cosh(3)}\fallingdotseq\sin^{-1}\dfrac{1}{10}\fallingdotseq 0.1rad\fallingdotseq 5.73^\circ\end{cases}$$

$s=0.1$ のときは，平行線角はかなり直角に近く， $s=3$ のときは，平行線角はとても小さいです．

下図は，「感じ」をつかむための模式図です．



s が小さいとき，平行線角は90° に近い



s が大きいとき，平行線角は0° に近づく

8.2.1. CabriⅡ による検証

Q を固定して C を動かして L と M が平行になるようにして下さい．このときの角 θ が，平行線角 $\Pi(s)$ です．次に Q を動かして，$\Pi(s)$ の変化を見てください．　　　[parallel_angle.html]

8.4. 平行線角と長さの単位

ユークリッド平面では，角度の単位（1 ラジアン）は，合理的に定まっていますが，「長さの単位」の取り方は任意です．(例えば，USA では今でも「マイル」を使っています.）　しかし，双曲幾何では，「長さの単位」も合理的に定めることができます.

$$\boxed{\begin{cases} \tan\dfrac{\Pi(s)}{2} = e^{-s} \\ \dfrac{1}{\sin\Pi(s)} = \cosh(s) \end{cases} \quad \cdots(*)}$$

これから 長さが角度によって定まります．例えば「$\Pi(1) \doteqdot 40.4°$」より，

「平行線角が $40.4°$ ならば，$[\mathrm{A,B}] = 1$」$\cdots$(#)

このように，「単位長さ」も，合理的に定まります.

[注] 一般に，双曲的長さを定義する時に 「$ds = \dfrac{|dz|}{y}$」の代わりに，「$ds = k\dfrac{|dz|}{y}$ （k は正の定数)」と定めても，矛盾なく双曲幾何は作れます．この場合，ds の代わりに $\dfrac{ds}{k}$ となるので，(*)は，

$$\boxed{\begin{cases} \tan\dfrac{\Pi(s)}{2} = e^{-\frac{s}{k}} \\ \dfrac{1}{\sin\Pi(s)} = \cosh\left(\dfrac{s}{k}\right) \end{cases}} \left(ds = k\dfrac{|dz|}{y} \text{のとき} \right) \cdots(**)$$

となります．(*)を使えば「$\Pi(0.1) \doteqdot 84.3°$」ですが，(**)で「$k = 10$」とすると，

「平行線角が $84.3°$ ならば，$[\mathrm{A,B}] = 1$」

となります．このように「単位長さを決めること」は，「k の値を定めること」と同じです.

球面上の幾何では「球の半径を 1」とした単位長をとると，球面幾何の公式が簡単になります.
同様に，H^+に於いて，

「平行線角が $40.4°$ ならば，$[\mathrm{A,B}] = 1$」$\cdots$(#)

と定めることは,「架空の球の半径を 1」と定めるようなもので, 双曲幾何の公式が簡単になります.
この様に，H^+では，「1 ラジアン」と同様，「長さの単位」も合理的に定めることができます.

8.5. Bolyai の平行線角の作図

Bolyai Janos (1802-1860)は，非ユークリッド幾何の発見者の一人として非常に有名ですが，彼による平行線角の作図です．(証明などはこちらをご覧ください.)

「直線 m 外の 1 点 A を通る m に平行な直線」の作図 .

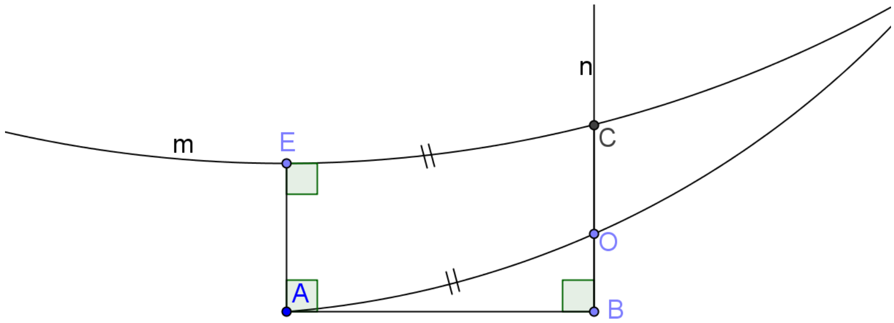
① A から m に垂線 AE を下ろします.

② EA と直交する直線を A から引き，その上に適当な点 B をとります．さらに，B を通り，AB と直交する直線 n を引きます.

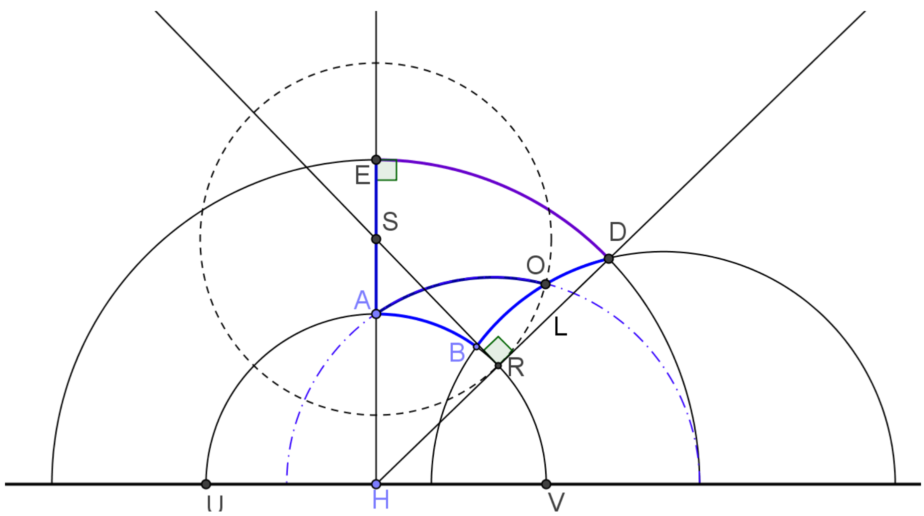
③ m と n の交点 C をとり，コンパス等で, n 上に $\overline{AO} = \overline{EC}$ となる点 O をとります.

④ A と O を結びます．直線 AO が, m と極限平行な直線です.

(*)ユークリッド平面上でも この作図はできます．この時「$O = B, \angle ECB = \angle R$」となります.



[例]　H⁺での，A を通り ED に平行な直線 の作図



D を通る直線 AE からの等距離線 L と，直線 AB の交点を R とすると $\overline{AR}=\overline{ED}$ & $AB \perp L$.
故に A を中心とし半径が $\overline{AR}$ の双曲的円は R において L と接する．この円と直線 BD の交点を O とすると $\overline{AO} = \overline{ED}$ をみたす． もちろんコンパスを利用しても描けます.
(例えば 「ユークリッドの命題 2」を利用してコンパスを作り，マクロにすると良い．)

Cabri と GeoGebra というソフトで，H^{+}上で作図しました.

[Cabri] Constraction.fig,　　[GeoGebra] construction.ggb

[注]上半平面モデルで，「ユークリッド線分の長さ」をdl，対する「双曲的線分の長さ」をds とすると，厳密には「$ds = k \cdot \dfrac{dl}{y}$」ですが，$k$ は「宇宙の比例定数」で，数学だけでは決まりません.
ところが，この作図では比例定数k の値は不要で，逆に，これから平行線角$\Pi(\mathrm{AE})$とk の値を求めることが出来ます．さらに，平行線角を利用して極限円を描くこともできます.